

Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра автоматизації
технологічних процесів
і виробництв

Лабораторна робота № 4
з курсу
”Гідрогазодинаміка”

Моделювання найпростіших
видів руху рідини та газу у
середовищі FreeFem++

Тернопіль 2018

Методичні вказівки до лабораторної роботи №4 "Моделювання найпростіших видів руху рідини та газу у середовищі FreeFem++" з курсу "Гідрогазодинаміка". Автори: Пісьціо В.П., Шкодзінський О.К., Тернопіль: ТНТУ, 2018 - 18 с.

Для студентів напряму підготовки: 151 "Автоматизація та комп'терно-інтегровані технології"

Автори: Пісьціо В.П., Шкодзінській О.К.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 29.08.2018 року)

Тема роботи

Моделювання найпростіших видів руху рідини та газу у середовищі FreeFem++

Мета роботи

Ознайомитись із базовими можливостями середовища FreeFem++ та найпростішими моделями руху рідин:

Основні формулювання рівнянь динаміки рідин та газів

Як відомо, опис течій за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса і теплопровідності це постановка крайових задач, в яких шуканими функціями були швидкість $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ тиск p ; температура T ; густина ρ .

У разі ізотермічних течій нестисливої рідини з постійними властивостями задача для швидкості і тиску відділяється від теплової задачі, тобто може бути вирішена незалежно. Число невідомих скорочується до чотирьох: компонент швидкості (u_x, u_y, u_z) та тиску p . Такі рівняння і задачі називаються задачами Нав'є-Стокса в природних змінних.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u_i + g_i, \quad (1)$$

де ρ - густина рідини, g - прискорення масових сил, $\eta = \frac{\mu}{\rho}$ - кінематична в'язкість, μ - динамічна

в'язкість. Для замикання системи рівнянь використовують рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho u_3).$$

У випадку сталої густини рівняння може бути записано у формі:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 = 0. \quad (3)$$

Однак можна сформулювати задачу в інших змінних, які також повно описують течію рідини. Зокрема, широко використовується така важлива характеристика, як вихор. Вона, як правило, позначається буквою ω . У тривимірному випадку це вектор з компонентами $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, що визначається

як векторний добуток оператора ∇ на вектор швидкості. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ де $\text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$.

Функція потоку

Розглянемо рівняння нерозривності у випадку сталої густини.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3 = 0. \quad (4)$$

Як відомо, поле швидкостей у такому випадку може розглядатись як соленоїдне, тобто таке, що може бути представлено у вигляді:

$$\mathbf{u} = \text{rot } \boldsymbol{\psi} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (5)$$

де $\boldsymbol{\psi}$ - деяка векторна функція, $\text{rot } \boldsymbol{\psi}$ - її ротор.

Розглянемо, для визначеності, двовірну задачу і будемо вважати, що швидкість по третій координаті рівна 0, а переміщення u_1 та u_2 не залежать від третьої координати. У такому випадку векторна функція $\boldsymbol{\psi}$ має лише одну ненульову складову ($\psi_3 = \psi$), і переміщення завжди можна задати у вигляді:

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \psi, \quad u_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi, \quad (6)$$

Дійсно, рівняння нерозривності при такому записі можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad (7)$$

і воно задовольняється тотожно.

Гідромеханічний зміст функції потоку

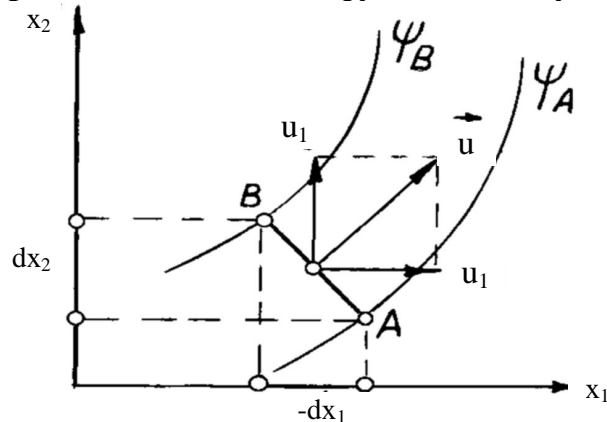


Рис. 1. Гідромеханічний зміст функції потоку:

Встановимо гідромеханічний зміст функції потоку, для чого проведемо дві лінії потоку (рис. 1). Обчислимо об'ємну витрату рідини, що протікає між ними, для чого розкладемо вектор швидкості частинки u на дві складові u_x і u_y , що дозволить представити витрату як суму:

$$dQ = dQ_x + dQ_y,$$

$$\text{одночасно } dQ_x = u_x dy, \quad dQ_y = u_y dx \text{ отже:}$$

$$Q = \int_A^B u_x dy - u_y dx = \int_A^B \frac{\partial}{\partial x_2} \psi dy + \frac{\partial}{\partial x_1} \psi dx = \int_A^B d\psi = \psi(B) - \psi(A). \quad (8)$$

Тобто різниця значень функцій потоку рівна об'ємному розходу між ними. У випадку непроникної стінки А В розхід рідини між точками рівний 0, тому значення функції потоку у точках А і В будуть співпадати.

Фізично ψ задає витрата рідини. Ізолінії функції потоку $\psi = \text{const}$ є лініями течії, тобто такими лініями, дотичні до яких в кожній точці збігаються за напрямком з вектором швидкості. Чим частіше ізолінії потоку, тим більше витрата в даному січенні.

Рівняння руху у формі перенесення вихрів

Ця форма особливо зручна і застосовується для опису плоских течій нестисливої рідини ($\rho = \text{const}$). Основна ідея введення нових змінних полягає в тому, щоб замість трьох рівнянь в природних змінних (двох рівнянь Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності) отримати 2 рівняння для вихру

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \text{ і функції потоку } \psi.$$

Для функцій потоку можна легко отримати рівняння, що зв'яже її із вихром швидкості. У визначення вихру підставимо визначення u_1 та u_2 через функцію потоку. Отримаємо:

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \psi = -\Delta \psi. \quad (9)$$

Тепер перейдемо до рівнянь Нав'є-Стокса.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u_1 + g_1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \eta \Delta u_2 + g_2. \quad (11)$$

Диференціюємо перше рівняння по x_2 , друге по x_1 та віднімаємо перше від другого, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + \eta \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}. \quad (12)$$

Отже отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \left(u_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) = \eta \Delta \omega + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \quad (13)$$

або:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right) = \eta \Delta \omega + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}. \quad (14)$$

Проте задача лишилась досить складною і нелінійною. Для подальшого розглянемо ще більш спрощення задачі. Наприклад, при великій в'язкості і відсутності масових сил $\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 0 \right)$ можна розглядати усталений рух $\frac{\partial}{\partial t} \omega = 0$ при малих значеннях сумарного потоку D , вважаючи, що вихор і функція потоку представляються у вигляді:

$$\psi = \sum_{n=1} D^n \psi_n \quad \omega = \sum_{n=1} D^n \omega_n,$$

і прирівнюючи між собою члени із однаковими ступенями η отримуємо систему рівнянь, що є лінійною відносно кожної нової складової ψ_n, ω_n .

У такому випадку, для першої складової система рівнянь буде такою:

$$-\Delta \psi_1 = \omega_1 \quad \eta \Delta \omega_1 = 0,$$

для другої:

$$-\Delta \psi_2 = \omega_2 \quad \eta \Delta \omega_2 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right),$$

для третьої:

$$-\Delta \psi_3 = \omega_3 \quad \eta \Delta \omega_3 = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right),$$

і так далі.

Функція потоку плоскої течії

Припустимо, що масові сили рівні 0, а циркуляція вектора швидкості $\omega = 0$. Це може спостерігатись при обтіканні тіла незбуреною рідиною, при протіканні рідин через короткі канали, тощо.

У такому випадку рівняння Нав'є Стокса задовольняється тотожно і залишається одне рівняння для функції потоку, котре суттєво спрощується:

$$-\Delta \psi = \omega = 0.$$

Граничні умови для функції потоку

Як відомо всі задачі гідро та аеродинаміки умовно можна розділити на задачі зовнішньої та внутрішньої динаміки. Задачі зовнішньої динаміки пов'язані із обтіканням тіла рідиною чи газом, а задачі внутрішньої динаміки - із протіканням рідин та газів через порожнини. Для задач зовнішньої динаміки характерно завдання швидкості і напрямку потоку рідини чи газу на нескінченно віддаленому колі, і умови непроникної стінки контуру тіла, що обтікається. Для задач внутрішньої динаміки характерно завдання умов непроникності рідин через стінку і завдання на вході розподілу тисків чи розходів через вхід і вихід у пристрій. Перейдемо до розгляду окремих граничних умов.

Розглянемо стінку, що є непроникливою для рідини. У такому випадку рідина не може просочуватись скрізь стінку і складова її швидкості нормальна до поверхні рівна 0. З іншого боку витрата між двома точками границі рівна 0, тому за (27) отримаємо граничну умову:

$$\psi = \text{const на всій непроникній частині стінки.}$$

У випадку коли пристрій має декількох непроникних для рідини стінок значення функції потоку на окремих ділянках визначається через розхід рідини між ділянками.

У деяких задачах має бути задана швидкість і напрямок потоку рідини чи газу на нескінченно віддаленому колі. Припустимо, що в необмеженій області швидкість плинину рідини постійна і направлена вздовж деякого вектора:

$$u|_{\infty} = (u_{x\infty} \ u_{y\infty}) \ \text{tg} \alpha = \frac{u_{y\infty}}{u_{x\infty}}, \quad (15)$$

де $u_{x\infty}$, $u_{y\infty}$ — задані, а кут α — кут нахилу напрямку до осі x . Використавши визначення функції потоку, можна вказати, що функція потоку на нескінченності задається співвідношенням:

$$\psi|_{\infty} = \psi_{\infty} = u_{x\infty} y - u_{y\infty} x. \quad (16)$$

У задачах внутрішньої динаміки часто заданим є розхід рідини на вході чи виході системи, а невідомою — різниця тисків. Тоді слід доповнити область, що розглядається порожнинами із характерним розміром більшим ніж поперечне січення області задачі і задати на їх зовнішній границі сталу швидкість потоку.

Потенціал швидкості

Для потенційного руху рідини за його визначенням $\text{rot } u = 0$, тобто циркуляція за замкнутому контуру рівна 0. Запишемо вирази для проекцій кутових швидкостей:

$$\omega_x = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (17)$$

За визначенням для безвихрового (потенціального) руху $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, отже у такому випадку:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (18)$$

Ці співвідношення дозволяють суттєвим чином спростити обчисл компонент швидкості u_x , u_y , u_z . Розглянемо вираз:

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz, \quad (19)$$

Воно побудовано аналогічно відомому із механіки твердого тіла виразу для елементарної роботи. Якщо цей вираз є повним диференціалом, то швидкостям можна приписати деякий потенціал.

Легко показати, що вираз (а) є повним диференціалом, якщо забезпечується умова рівності нахрест взятих похідних,

Співвідношення (18) як раз і задовольняють таким вимогам тобто взяті нахрест похідні від компонентів (19) дають співвідношення (18). Таким чином при потенціальному русі рідини вираз (18) є повним диференціалом деякої функції ϕ :

$$d\phi = u_x dx + u_y dy + u_z dz, \quad (20)$$

з іншого боку, за спільним правилом повний диференціал може бути представлений як:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz. \quad (21)$$

Співставляючи останні вирази маємо:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (22)$$

або у векторній формі:

$$u = \nabla \phi.$$

За пропозицією Гельмгольца функцію ϕ називають потенціалом швидкості. Таким чином, кожному руху рідини, що відбувається без обертання частинок, відповідає свій потенціал швидкості. Справедливо і зворотне твердження: якщо існує потенціал швидкості, то рух відбувається без обертання частинок.

З виразів (22) безпосередньо випливає, що всі три компоненти швидкості можуть бути визначені, якщо відома лише одна величина - потенціал швидкості. Таким чином, знання потенціалу

швидкості істотно спрощує розрахунок поля швидкостей у рідині. Тепер перейдемо до виводу рівнянь, що описує потенціал швидкості рідини. Як відомо густина рідини зв'язана із її щільністю рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (23)$$

У випадку нестисливої або слабо стисливої рідини похідна від густини за часом рівна 0 і тому рівняння спрощується до:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (24)$$

де $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ дивергенція добутку густини на вектор швидкості. Так як крім того густина є сталою величиною рівняння можна спростити до:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0. \quad (25)$$

Підставляючи у рівняння отриманий вираз для швидкості через потенціал маємо:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = 0. \quad (26)$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що дивергенція градієнта скалярної функції ϕ може бути визначена через оператор Лапласа, отже отримаємо:

$$\Delta \phi = 0, \quad (27)$$

або у по координатній формі:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi = 0. \quad (28)$$

Рівняння Бернуллі, що зв'язує тиск p із швидкістю течії \mathbf{u} може бути записано у формі::

$$p + \frac{1}{2} \rho (u_x^2 + u_y^2) = \text{const}. \quad (29)$$

Вирази (27) і (28) є рівнянням Лапласа, а для знаходження потенціалу швидкості необхідно його про інтегрувати. Будь-яка функція, яка задовольнить цьому рівнянню, носить назву гармонійної. Як будь-який диференціальне рівняння, рівняння Лапласа має нескінченні кількість розв'язків, тому для того, щоб однозначно визначити потенціал швидкості, необхідно задати граничні умови. Для задач, пов'язаних з обтіканням тіл, так званих зовнішніх завдань гідромеханіки, такими умовами є $u_n = 0$ і $u_\infty = \text{const}$. Перша умова характеризує безвіддривність течії (рівність нулю нормальної компоненти швидкості). Друга - показує, що далеко від тіла розподіл швидкостей відомий.

Для задач протікання рідин через порожнини аналогічними умовами будуть безвіддривність течії на стінках порожнини і заданий розподіл тисків чи швидкостей на вході і виході у порожнину. Поверхні (або лінії для двовимірних потоків), в кожній точці яких $\phi = \text{const}$, називаються еквіпотенціальними.

Зв'язок потенціалу швидкості і функції току

Зв'язок між двома параметрами може бути легко встановлена, якщо записати отримані вище вирази для проекцій швидкостей:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (30)$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (31)$$

звідки:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (32)$$

Ці співвідношення грають важливу роль в механіці рідини і носять назву співвідношень Коши-Рімана. Перемноживши їх отримаємо:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (33)$$

З курсу математики відомо, що вирази типу (31) свідчать про взаємну ортогональність кривих. Отже ліній току і еквіпотенціальні лінії утворюють сітку, котра носить назву гідродинамічної сітки руху. Наближений її вигляд показаний на наступному рисунку.

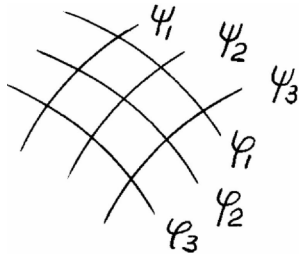


Рис. 2.

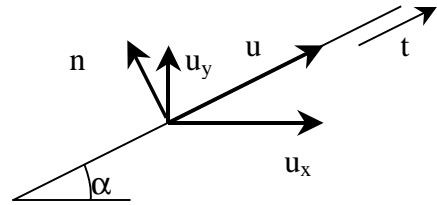


Рис. 3.

Задача зовнішньої динаміки

Розглянемо спочатку найбільш просту задачу - задачу обтікання контуру рідиною чи газом. Дана задача виникає при обтіканні різних давачів у потоці рідини, крил літаків, профілів суден, тощо. Із вищенаведених міркувань випливає, що функція потоку при обтіканні невязкою рідиною може бути приведена до розв'язку рівняння відносно функції потоку, що описується диференціальним рівнянням:

$$\Delta\psi = 0, \quad \psi|_W = C_1, \quad \psi|_\infty = \psi_\infty. \quad (34)$$

Крайова умова $\psi|_W = C_1$ на контурі W відповідає випадку контуру, непроникливого для рідини. Зрозуміло, що неможливо чисельно розв'язати задачу (30) в нескінченній області. Тому умову $\psi|_\infty = \psi_\infty$ замінимо умовою на деякому околі досить великого радіусу R :

$$\psi|_{(x^2+y^2)=R^2} = \psi_\infty. \quad (35)$$

Для отримання результатів слід провести узгодження функції потоку на контурі W та границі, що віднесена до нескінченності. Для цього можна скористатись умовами симетрії або, краще взяти умову, що нормальна похідна $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ на задній кромці контуру була неперервною у точці P - точці сходження верхньої та нижньої поверхонь профілю задньої кромки (така умова називається умовою Кутта-Жуковського). Дана умова має простий фізичний зміст: тиск у околі точки P не має мати розривів, а компоненти швидкості мають бути неперервними.

Для пошуку C_1 скористаємось методом суперпозиції: так як всі рівняння є лінійними функція потоку може бути представлена у вигляді:

$$\psi = \psi_0 + C_1(\psi_1 - \psi_0),$$

де ψ_0 визначає розв'язок задачі (34) при $C_1 = 0$, а ψ_1 - розв'язок задачі (34) при $C_1 = 1$.

Значення похідної по нормалі до верхньої поверхні в околі задньої кромки профіля P можна знайти за допомогою наближення:

$$\frac{\partial\psi^+}{\partial n} = \lim_{s(P^+,P) \rightarrow 0} \frac{\psi(P^+) - \psi(P)}{s(P^+,P)},$$

де P^+ - точка над вершиною відкладена по нормалі до позитивної поверхні. $s(P^+,P)$ - відстань між точками P^+ та P . Аналогічно, значення нормальної похідної до нижньої поверхні визначається як:

$$\frac{\partial\psi^-}{\partial n} = \lim_{s(P,P^-) \rightarrow 0} \frac{\psi(P^-) - \psi(P)}{s(P^-,P)},$$

Так як зовнішні нормалі до поверхонь направлені в різні сторони стрибок нормальної похідної визначається як:

$$\frac{\partial\psi^+}{\partial n} + \frac{\partial\psi^-}{\partial n} = \lim_{s(P^+,P) \rightarrow 0} \frac{\psi(P^+) - \psi(P)}{s(P^+,P)} + \lim_{s(P^-,P) \rightarrow 0} \frac{\psi(P^-) - \psi(P)}{s(P^-,P)}.$$

Так як за умовою $\frac{\partial\psi^+}{\partial n} + \frac{\partial\psi^-}{\partial n} = 0$, то при $s(P^+,P) = s(P^-,P)$ маємо умову:

$$\psi(P^+) + \psi(P^-) - 2\psi(P) = 0.$$

Визначаючи ψ через ψ_0 та ψ_1 і враховуючі, що на контурі $\psi(P) = \psi_0(P) + C_1\psi_1(P) = C_1$, маємо:

$$\psi_0(P^+) + C_1(\psi_1(P^+) - \psi_0(P^+)) + \psi_0(P^-) + C_1(\psi_1(P^-) - \psi_0(P^-)) - 2C_1 = 0$$

звідки:

$$C_1 = -\frac{\psi_0(P^+) + \psi_0(P^-)}{\psi_1(P^+) - \psi_0(P^+) + \psi_1(P^-) - \psi_0(P^-) - 2} \quad (36)$$

Таким чином план розв'язку є наступним:

- 1) Розв'язати задачу при нульовому і одиничному значенні константи C_1 .
- 2) Обчислити за вищенаведеною формулою дійсне значення C_1 .
- 3) На основі C_1 побудувати розв'язок задачі.

Вирішивши задачу, можна знайти поле швидкостей, на його основі використовуючи рівняння Бернуллі визначити тиск p (природно із точністю до константи):

$$u = (u_x, u_y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad p = -\frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (37)$$

Для розв'язку задачі будемо використовувати програму FreeFem++.

Основи методу скінчених елементів

Метод скінчених елементів (МСЕ) є популярним і ефективним методом чисельного вирішення різних завдань математичної фізики. Привести список величезної кількості літератури, присвяченої основам методу і проблемам, пов'язаним з його застосуванням, - практично нездійсненне завдання. Метод давно став класичним і в даний час його опис традиційно включається в багато підручники з чисельних методів [5]

Необхідно відмітити, що незважаючи на те, що метод кінцевих елементів відомий дуже давно, до цих пір в літературі використовуються різні терміни. Так, сам метод називається - метод кінцевих елементів, варіаційно-різницеви метод, проекційно-сітковий і т.п. Для назви базисних функцій використовуються терміни: тестові функції, пробні функції і т.п. Це пов'язано з широким застосуванням методу для вирішення різного роду задач - і у кожній із згаданих областей прийнята своя специфічна термінологія.

Скінчено елементний розв'язок задачі

Отже розглянемо наведеного вище рівняння Лапласа для визначення функції $u(x, y)$ в разі заданої області D (першу крайову задачу):

$$\Delta \psi = f(x, y), \quad (38)$$

$$\Delta \psi - f(x, y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \psi|_{\Gamma} = C. \quad (39)$$

Де $f(x, y)$ — задана в області D функція, $\Gamma = \partial D$ - границя області D , Δ — оператор Лапласа.

Пряма підстановка у наведене вище рівняння якогось наближення не дуже плідотворна, що пов'язано із високими вимогами на гладкість функцію ψ (вона має мати похідну першого та другого порядку по всім координатам). Тому підемо інакшим шляхом. Для виведення основного співвідношення помножимо рівняння на довільну функцію $v(x, y)$ взятую із деякого набору, і проінтегруємо по області D . Так як функція $v(x, y)$ є довільною задача буде еквівалентною початкової. Єдина умова, що на неї накладається - бути рівною 0 там де задано:

$$\int_D v \Delta \psi - v f(x, y) ds = 0. \quad (40)$$

Використовуючи формулу Грина:

$$\iint_D v \Delta u dx dy = - \iint_D \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (41)$$

де $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ $\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$ отримаємо:

$$- \int_D \nabla v \cdot \nabla \psi ds + \int_{\Gamma} v \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \int_D v f ds = 0. \quad (42)$$

Для того, що спростити задачу будемо вважати, що $v = 0$ всюди на границі, де за умовою не

задано значення нормальної похідної шуканої функції $\frac{\partial \psi}{\partial n}$.

Тоді початкова задача еквівалентна задачі знаходження такого ψ , що задовольняє умові:

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \psi ds - \int_{\Gamma} v \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_D v f ds = 0. \quad (43)$$

Також будемо вимагати, що функція $v(x,y)$ задовольняє крайовій умові $v|_{\Gamma} = 0$ всюди де задано значення u . Тоді остаточно отримаємо:

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \psi ds + \int_D v f ds = 0, \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad \psi|_{\Gamma} = C. \quad (44)$$

Будемо шукати наближене рішення задачі у вигляді:

$$\psi^h(x, y) = \sum_k c_k \phi_k(x, y), \quad (45)$$

де ψ^h - наближений розв'язок, функції ϕ_k є відомими лінійно незалежними і називаються базисними функціями, c_k - коефіцієнти, що необхідно визначити. Формула (45) задає вигляд невідомого розв'язку $\psi(x,y)$ в вигляді проєкції на скінчено-мірний простір, що визначається базисом $\phi_k(x)$, $k = 1, \dots, n - 1$. Точність апроксимації, природно, буде залежати від того, наскільки «добре» обраний простір наближує початковий, котрому повинна належати функція $u(x)$. Таким чином наближений розв'язок повністю визначається набором чисел $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, тобто можна вважати, що $u^h = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ це вектор n мірного простору дійсних чисел.

Для отримання наближеного розв'язку необхідно обрати також набір функції v , котрі називають пробними функціями. Зручно у якості набору пробних функцій обрати ті самі функції ϕ_k тоді вся задача зведеться до обчислення набору інтегралів:

$$\int_D \nabla \phi_n \cdot \nabla \sum_k c_k \phi_k ds + \int_D \phi_n f ds = 0, \quad (46)$$

для отримання системи рівнянь:

$$A_{kn} c_k + B_n = 0, \quad (47)$$

із котрих може бути отриманий розв'язок, точніше набір коефіцієнтів c_k .

Легко бачити, що:

$$A_{kn} = \int_D \nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_k ds, \quad B_n = \int_D \phi_n f ds. \quad (48)$$

Розв'язок задачі у FreeFem++

FreeFem++ це інтегроване середовище розробки зі своєю власною C-подібною мовою програмування, котра призначена для чисельного розв'язку диференціальних рівнянь в частинних похідних методом кінцевих елементів. FreeFem++ дозволяє досліджувати стаціонарні і нестаціонарні математичні моделі (у фізиці, хімії, біології, інженерних додатках і т. п. в 2 та трьох вимірній постановці).

Коротко перелічимо можливості FreeFem++:

1. Побудова чисельного розв'язку стаціонарних і нестаціонарних, лінійних і нелінійних двовимірних та тривимірних крайових задач.
2. Безпосередній, тобто без складання алгоритму, розв'язок лінійних стаціонарних крайових задач. При цьому вихідна задача має бути представлена в слабій (варіаційній) формі.
3. Розв'язок нестаціонарних і нелінійних крайових задач потребує складання деякого алгоритму розв'язку, покрокового для нестаціонарних і ітераційного для нелінійних задач, що дозволяє зводити вихідну задачу до набору лінійних крайових задач.
4. Просторова двовимірна область, в якій будується розв'язок, описується за допомогою границь, що задаються у параметричній формі аналітичними співвідношеннями.
5. Для триангуляції області використовується вбудований автоматичний генератор сіток, заснований на алгоритмі Делоне, при цьому щільність внутрішніх точок області пропорційна щільності точок на її границі. При побудові сіток застосовується анізотропна адаптація, що дозволяє ефективно перебудовувати сітку в процесі проведення обчислень. Генеровані сітки можна зберігати у вигляді файлів і використовувати в подальшому.
6. Для побудови розв'язку є широкий набір базисних кінцевих елементів: що дозволяє

використовувати зручні апроксимації диференціальних рівнянь, котрі описують задачу.

7. Для проведення обчислень система має широкий набір швидких алгоритмів, що включають прямі та ітеративні алгоритми розв'язання систем лінійних рівнянь - LU, Cholesky, Crout, CG, GMRES, UMFPACK, а також алгоритми для знаходження власних значень і власних векторів задач.

8. Система дозволяє зберегти результати моделювання у вигляді текстових і postscript-файлів, а також зобразити їх на дисплеї.

9. Алгоритми записуються на мові, близькій до C++. При цьому ефективність коду за швидкістю близька до швидкості програм, безпосередньо написаних на мові C++.

10. У разі необхідності є можливість доступу до внутрішніх векторів і матриць, що, зокрема, дозволяє створювати власні алгоритми вирішення задач.

У порівнянні з комерційними пакетами, призначеними для вирішення рівнянь в частинних похідних, наприклад, FemLab або ANSYS, використання FreeFem++ вимагає більшої «розумової» роботи від користувача. Зокрема, неможливо записати задачу в початковому вигляді, або у термінах "матеріал-властивості" - потрібно її конвертувати до так званої слабкого формулювання. Однак ці мінуси майже повністю компенсуються простотою мови FreeFem++, можливістю доступу до всіх внутрішніх даних і можливістю створення власних алгоритмів.

Слабке формулювання задачі на мові FreeFem++

Розглянемо вище згадану задачу $u(x, y)$ у двовірній області D , на фрагментах зовнішній і внутрішній ділянках котрої заданий розподіл функції потоку ψ .

$$\Delta\psi = 0, \quad \psi|_W = 0, \quad \psi|_\infty = \psi_\infty \quad (49)$$

нагадаємо, що така умова називається неоднорідною умовою Діріхле.

Перш ніж приводити коди на мові FreeFem++, нагадаємо координатно форму запису наступного інтеграла:

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \psi ds = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) ds. \quad (50)$$

Якщо використовувати позначення:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y. \quad (51)$$

То останній вираз може бути записаний у вигляді:

$$\int_D \nabla v \cdot \nabla \psi ds = \int_D (\partial_x v \partial_x \psi + \partial_y v \partial_y \psi) ds. \quad (52)$$

Наведемо схему, за допомогою якої задача в слабкій формі записується на мові FreeFem++

$$\iint_D \nabla v \cdot \nabla u dx dy \rightarrow \text{int2d(Th)}(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)), \quad (53)$$

$$-\iint_D f v dx dy \rightarrow -\text{int2d(Th)}(f * v), \quad (54)$$

$$-\int_{\Gamma_1} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \rightarrow \text{on}(\text{Gamma1}, u = g1), \quad (55)$$

Таким чином, інтеграли, що містяться в натуральному виразі, практично дослівно переписуються в кодах мови FreeFem++. Може бути наступна схема відповідностей є навіть більш зручною.

$$\iint_D (...) dx dy \rightarrow \text{int2d(Th)}(...), \quad (56)$$

$$\int_{\Gamma_i} (...) ds \rightarrow \text{int1d(Th, GammaI)}(...), \quad (57)$$

$$\partial_x(...) \partial_x(...) \rightarrow dx(...) * dx(...), \quad (58)$$

$$\partial_y(...) \partial_y(...) \rightarrow dy(...) * dy(...), \quad (59)$$

Інтуїтивно зрозуміло, що Γ в виразах $\text{int2d}(\Gamma)$ позначає область інтегрування (точніше, Γ - триангуляція області D), (Γ, GammaI) в виразі $\text{int1d}(\Gamma, \text{GammaI})$ вказує область і фрагмент її межі, за якої проводиться інтегрування.

Також має бути ясно, що крайова умова вимагає спеціальної форми запису. У підінтегрального виразі для інтеграла по межі Γ_1 похідна $\partial/\partial n$ не може бути виключена за допомогою будь-яких перетворень. Саме тому крайова умова задається безпосередньо в тому вигляді, як вона записано, за допомогою ключового слова `on` в формі:

```
on (GammaI, u = C1).
```

де $u = g_1$ умова, що має бути досягнута, GammaI - частина границі де має бути дотримана умова. Так як оператор `on` фактично вводить штрафну функцію для задоволення граничних умов на всій заданій у операторі границі, інтеграл по границі Γ із слабкого формулювання можна не враховувати у всіх точках де задані граничні умови оператором `on()`. Фрагмент програми для вирішення завдання на мові FreeFem++ виглядає так:

```
solve potential(psi,v) =  
int2d(Th) (dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))  
+int2d(Th)(v*f)  
+ on(GammaI, psi = Uinfy*y-Winfy*x) + on(Sp, Sm, psi=0);
```

Завдання області на мові FreeFem++

Для того, щоб визначити область D в FreeFem++ досить вказати границю області. Це можливо зробити за допомогою параметричного завдання окремих частин границі з використанням ключового слова `border`. Наведемо приклад завдання області D в випадку прямокутника $[0, a] \times [0, b]$

```
border Gamma2 (t=0,1) { x=a*t; y=0; };  
border Gamma11 (t=0,1) { x=a; y=b*t; >;  
border Gamma3 (t=0,1) { x=a*(1-t); y=b; };  
border Gamma12 (t=0,1) { x=0; y=b*(1-t); };
```

Границя $\Gamma_1 = \Gamma_{11} \cup \Gamma_{12}$ передбачається незв'язною. Саме тому для кожного її зв'язкового фрагмента використані різні ідентифікатори Gamma11 і Gamma12 .

Інтуїтивно зрозуміло, що, наприклад, перший рядок відповідає параметричній формі записи для відрізка прямої лінії $x \in [0, a], y = 0$.

$$x = at, \quad y = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (60)$$

Зауважимо, що порядок визначення фрагментів границі не має значення, тобто стрічки з операторами `border` можуть бути переставлені. Однак важливо, щоб при зростанні параметра t обхід області D відбувався в напрямку проти годинникової стрілки.

Для прикладу, що розглядається зовнішня границя визначається як коло, тому її параметричний опис є наступним:

```
border C(t=0,2*pi) { x=5*cos(t); y=5*sin(t);}
```

А внутрішня границя області описується як суперпозиція двох границь:

```
border WingUp(t=0,1){  
  x = t-Yt(t)*sin(theta(t));  
  y = Yc(t)+ Yt(t)*cos(theta(t));  
  label=Sp; }  
border WingDn(t=1,0){  
  x = t+Yt(t)*sin(theta(t));  
  y = Yc(t)- Yt(t)*cos(theta(t));  
  label=Sm; }
```

Кожній границі може бути присвоєна мітка `label`, котра дозволяє полегшити звертання до границь.

Після завдання границь необхідно створити сітку на котрій буде здійснюватись моделювання задачі. Для чого достатньо вказати оператор:

```
mesh Th = buildmesh(C(50*n)+WingUp(70*n)+WingDn(70*n))
```

Він створює сітку з назвою Th за допомогою конструктора `buildmesh` на основі границь C , `WingUp`, `WingDn`.

У якості параметра передається число вузлів на відповідній частині границі області.

На основі сітки може бути побудовано кінцево-елементний простір, що буде використовуватись для розв'язку задачі. У FreeFem++ не накладається жодних умов на число кінцево-елементних просторів, що будуються. Для завдання кінцево-елементного простору достатньо вказати оператор fespace:

```
fespace Vh(Th,P1)
```

У даному прикладі буде створено кінцево-елементний простір Vh над сіткою Th із елементами типу P2 (кусочно квадратично неперервний кінцевий елемент).

Далі слід визначити над побудованим кінцево-елементним простором масив змінних, що буде використовуватись при розв'язку задачі у даному випадку це здійснюється оператором котрий визначає два масиви для змінної ψ і для пробних функцій v :

```
Vh psi,v;
```

Для вказівки типу задачі використовується оператор solve, що виконує відразу дві дії: визначає задачу, що буде вирішуватись і вирішує її.

```
solve potential(psi,v) =  
  int2d(Th)(dx(psi)*dx(v)+dy(psi)*dy(v))  
  + on(C, psi = Uinfty*y-Winfty*x)  
  + on(Sp, Sm, psi=0);
```

У даному випадку вирішується задача із назвою potential, котрій передаються 2 масиви змінних psi та v. Результати обчислень зберігаються у масивах psi та v.

Код програми

Наведемо код програми на мові FreeFem++, задаючи, для визначеності, як контур W так званий профіль крила NASA2412 (спосіб конструювання різних профілів наведено на с. 57) і вибираючи наступні параметри $R = 5$, $u_{1\infty} = v_0 \cos(\alpha)$, $u_{2\infty} = v_0 \sin(\alpha)$, де v_0 - повна швидкість, α - кут напрямку потоку.

```
int Sp=97, Sm=98;           // мітки контуру:  
int n=1;  
real rho = 1.2754;          // густина середовища:  
real R=10, R0=1, shift=0.5; // параметри опису робочої зони:  
// Кут і швидкість обтікання:  
func real GradToRad(real Grad)  
{return Grad*pi/180;}  
real V = 1;  
real alpha = 10;  
// Компоненти швидкості:  
real Xinfty = V*cos(GradToRad(alpha));  
real Yinfty = V*sin(GradToRad(alpha));  
// Задання зони розрахунків (коло радіусом R)  
border C(t=0,2*pi) { x=R*cos(t); y=R*sin(t);}   
// Задання зони візуалізації результатів в околі профілю:  
// (коло радіусом R0)  
border ZoomC(t=0,2*pi) { x=R0*cos(t)+shift; y=R0*sin(t);}   
/*****/  
// Задання контуру, що обтікається:  
// параметри контуру NASA2412  
real m0 = 0.01*2;  
real p0 = 0.1*4;  
real t0 = 0.01*12;  
// Функція завдання товщини:  
func real Yt(real t)  
{ return 5*t0*(0.296900*sqrt(t)- 0.126556*t - 0.356307*t^2  
  + 0.290672*t^3 - 0.104709*t^4); }
```

```

// функція для завдання середньої лінії:
func real Yc(real t)
{ if((0<=t)|| (t<=p0))
  { return m0*(1/(p0^2))*(2*p0*t -t^2);}
  else:
  if((p0<t)|| (t<=1.0))
    {return m0*((1/(1-p0)-2)*((1-2*p0)+2*p0*t-t-2));}
  else return 0;
}
// theta=arctg(dYc/dt)
func real theta(real t)
{ return atan((0<=t)*(t<=p0)*(m0*(1/(p0^2))*(2*p0 -2*t))+
  (p0<=t)*(t<=1.0)*(m0*((1/(1-p0)^2)*(2*p0-2*t)))); }
//Верхня границя профілю:
border WingUp(t=0,1){x = t-Yt(t)*sin(theta(t));
  y = Yc(t)+ Yt(t)*cos(theta(t)); label=Sp; }
//Нижня границя профілю:
border WingDn(t=1,0){x = t+Yt(t)*sin(theta(t));
  y = Yc(t)- Yt(t)*cos(theta(t)); label=Sm; }
// Точки над і під кромкою профілю:
real PpX = 1.05,PpY = 0.02; //Точка над кромкою:
real PmX = 1.05,PmY = - 0.02; //Точка під кромкою:
/***** Побудова сіток *****/
// Побудова сітки, що описує задачу:
mesh Th= buildmesh(C(15*n)+WingUp(35*n)+WingDn(35*n));
// Визначення простору скінченних елементів задачі:
fespace Vh(Th,P2);
Vh psi0,psi1,v,u1,u2; // Визначення змінних задачі:
// Побудова сітки, що описує окіл профілю для візуалізації:
mesh Zoom = buildmesh(ZoomC(30*n)+WingUp(35*n)+WingDn(35*n));
// вивід профілю:
plot(Th, wait=1);
// Розв'язок задачі при C1 = 0
solve potential0(psi0,v) =
  int2d(Th)(dx(psi0)*dx(v)+dy(psi0)*dy(v))
  + on(C, psi0 = Xinfty*y-Yinfty*x)
  + on(Sp, Sm, psi0=0);
Vh pr0 = -dx(psi0)^2 - dy(psi0)^2;
// Розв'язок задачі при C1 = 1
solve potential1(psi1,v) =
  int2d(Th)(dx(psi1)*dx(v)+dy(psi1)*dy(v))
  + on(C, psi1 = Xinfty*y-Yinfty*x)
  + on(Sp, Sm, psi1=1);
u1 = dy(psi1); u2 = -dx(psi1);
real U1p1 = u1(PpX,PpY);
real U2p1 = u2(PpX,PpY);
real U1m1 = u1(PmX,PmY);
real U2m1 = u2(PmX,PmY);
Vh pr1 = -dx(psi1)^2 - dy(psi1)^2;
plot(pr1,cmm = "Pressure 1",wait=1);
cout<<"Pressure 1 "<<pr1(PpX,PpY)<<"\n";
cout<<"Pressure 1 "<<pr1(PmX,PmY)<<"\n";
// Обчислення значення константи C1

```

```

real C1 = - (psi0(PpX,PpY)+psi0(PmX,PmY));
C1 = C1/(psi1(PpX,PpY)+psi1(PmX,PmY)
      - psi0(PpX,PpY)-psi0(PmX,PmY)-2);
// Обчислення реального значення функції потоку:
cout<<"C1 = "<<C1<<"\n";
Vh psi = psi0 + C1*(psi1);
Vh p = -dx(psi)^2 - dy(psi)^2;
plot(p,смм = "Pressure fin");
cout<<"Pressure fin 2"<<p(PpX,PpY)<<"\n";
cout<<"Pressure fin 2"<<p(PmX,PmY)<<"\n";
// Обчислення компонент швидкості:
u1 = dy(psi);
u2 = -dx(psi);
// Обчислення тиску:
Vh cp = rho*(-u1^2-u2^2);
fespace ZVh(Zoom,P2); // Створення простору для візуалізації:
// Створення змінних для візуалізації і копіювання в них даних:
ZVh Zpsi,Zcp,Zu1,Zu2;
Zpsi = psi0;Zu1 = u1;Zu2 = u2;Zcp = cp;
plot(Zpsi, wait=1, bw=1, nbiso=50, смм = "Psi");
plot(Zcp, wait=1, bw=1, nbiso=40, смм = "P", value=1);
plot([Zu1,Zu2], wait=1, bw=1, coef=0.02, value=1);
plot(Zu2, wait=1, bw=1, coef=0.02, value=1);

```

Результати розрахунків

Результати розрахунків представлені на рис. 4.

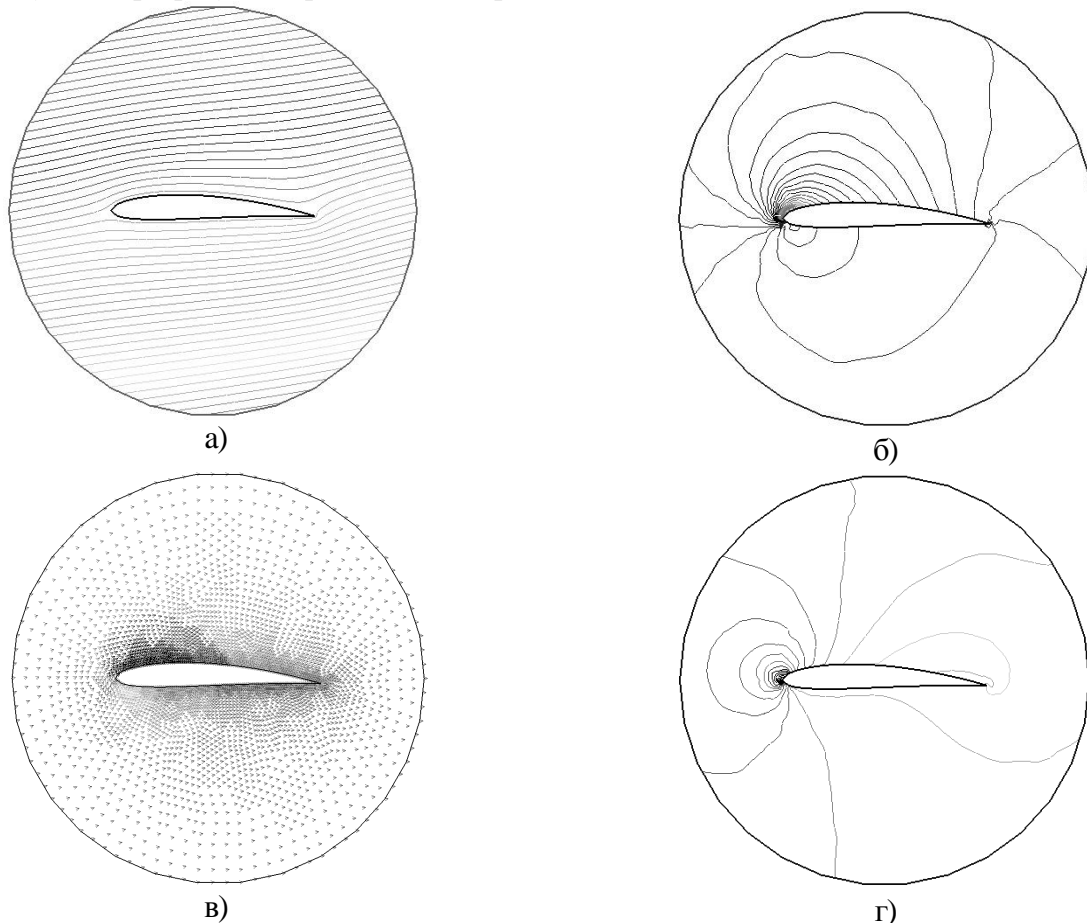


Рис. 4. Ізолії функції потоку (а), тиску (б) поле швидкостей (в) і ізолії швидкості u_2 (г) при обтіканні крила:

Коротко опишемо один із способів конструювання профілів крила, відомих як сімейство профілів NASA 4 digits.

Здається стандартна функція $y_t(t)$, яка називається товщиною крила, і функція $y_c(t)$, яка називається середньою лінією контуру крила (chamber line or mean line):

$$y_t(t) = 5T(0,296900\sqrt{t} - 0,126556t - 0,356307t^2 + 0,290672t^3 - 0,104709t^4) \quad (61)$$

$$y_c(t) = \begin{cases} \frac{m}{p^2}(2pt - t^2), & 0 \leq t \leq p, \\ \frac{m}{(1-p^2)}(1 - 2p + 2pt - t^2), & p \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (62)$$

Вводиться допоміжна функція $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \arctg\left(\frac{dy_c(t)}{dt}\right), \quad \frac{dy_c(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{2m}{p^2}(p - t), & 0 \leq t \leq p, \\ \frac{2m}{(1-p^2)}(p - t), & p \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (63)$$

Координати верхньої (upper) і нижньої (lower) частин контуру крила визначаються параметричними рівняннями:

$$x_{\text{upper}} = t - y_t(t) \sin(\theta(t)), \quad y_{\text{upper}} = y_c(t) + y_t(t) \cos(\theta(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (64)$$

$$x_{\text{lower}} = t + y_t(t) \sin(\theta(t)), \quad y_{\text{lower}} = y_c(t) - y_t(t) \cos(\theta(t)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (65)$$

Параметри T , m , p входять в зазначені співвідношення, обчислюються по цифровому коду профілю. Наприклад, для профілю крила NASA2412, використовуючи цифри коду як чисельники дробу, отримаємо (рис. 5):

$$m = \frac{2}{100}, \quad p = \frac{4}{10}, \quad T = \frac{12}{100}. \quad (66)$$

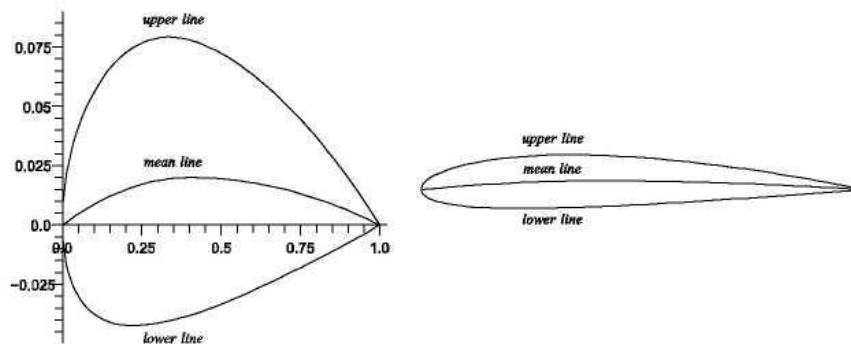


Рис. 5. Профіль крила NASA2412 (праворуч у масштабі 1: 1)

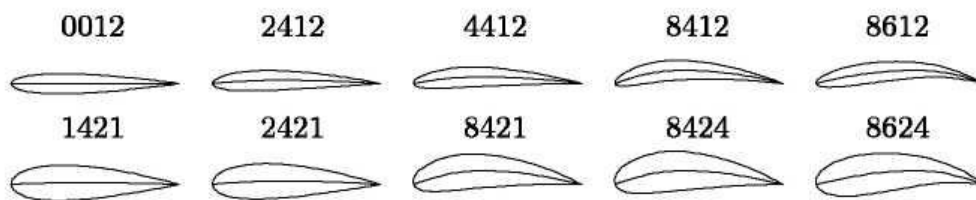


Рис. 6. Різні профілі NASA:

На рис. 6 для порівняння показані деякі профілі крила NASA.

Завдання

1. Запустити запропоновану програму і добитись її роботоздатності.
2. Розібратись із запропонованим кодом, і ознайомитись із способом побудови профілів NASA.
3. Додати оператор для побудови векторного поля швидкостей $[u_1, u_2]$
4. Побудувати поле розподілу швидкостей для профіля (за вибором)
NASA2412 NASA4412 NASA8412 NASA8612 NASA1421 NASA2421 NASA8421 NASA8424
5. Побудувати поле швидкості для різних швидкостей потоку і різних кутів нахилу.

6. Зробити висновок про можливість отримання залежності параметрів профілю від швидкості.

Контрольні питання

1. Наведіть обмеження, що були використані для виведення рівнянь, котрі описують модельну задачу.
2. Що таке функція потоку?
3. Які основні можливості мови FreeFem++
4. У чому полягає суть метода скінчених елементів?
5. Як описати задачу обтікання профілю на мові FreeFem++?
6. Які граничні умови можна поставити для задачі обтікання профілю?

Література

1. Цуренко Ю.И. Гидромеханика. Техническая физика. Учебное пособие для студентов. Северодвинск, СЕВМАШВТУЗ, 2007 – 87 с., ил. [текст режим доступу <https://studfiles.net/download.php?id=5583193&code=87cf67185a49dff031c64693a9ec9dfc>]
2. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии/Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. - 256 с.
3. Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Version 3.17-1. <http://www.freefem.org/ff++>.
4. Пакет конечных элементов FreeFem++ (Учебное пособие) Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. - 78.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.

Зміст

Тема роботи.....	3
Мета роботи.....	3
Основні формулювання рівнянь динаміки рідин та газів.....	3
Функція потоку	3
Гідромеханічний зміст функції потоку	4
Рівняння руху у формі перенесення вихрів	4
Функція потоку плоскої течії	5
Граничні умови для функції потоку.....	5
Потенціал швидкості.....	6
Зв'язок потенціалу швидкості і функції току	7
Задача зовнішньої динаміки	8
Основи методу скінчених елементів	9
Скінчено елементний розв'язок задачі	9
Розв'язок задачі у FreeFem++	10
Слабке формулювання задачі на мові FreeFem++	11
Завдання області на мові FreeFem++.....	12
Код програми	13
Результати розрахунків	15
Завдання.....	16
Контрольні питання	17
Література.....	17
Зміст.....	18